Zusatzkapitel: Herleitung der Wellen-Formel

Von Joachim Gaukel und Christian Holler

In diesem zusätzlichen Kapitel wollen wir uns mit der in einer Welle steckenden Energie beschäftigen.

Reisen wir dazu gedanklich an einen Strand, wo es Wellen gibt. Dort legen wir uns in einen Strandkorb mit einen Drink in der Hand und betrachten die ankommenden Wellen. Jetzt kommt der Eisverkäufer auf uns zu und erklärt uns, dass der Strand nicht der geeignete Platz ist für unsere Analyse, denn bei geringer Wassertiefe verhalten sich Wellen ganz anders und haben auch eine ganz andere Gestalt als weit draußen.

Wellen tragen ziemlich viel Energie mit sich! Können wir auch abschätzen, wieviel? (CC0)

Wir erheben uns also aus unserem Strandkorb und steigen in ein Motorboot, mit dem wir nach draußen fahren, wo das Wasser tief ist. Wir beobachten dort, dass die Wellen nicht so arg regelmäßig ankommen. Das liegt daran, dass sich der Wellengang aus einer Überlagerung mehrerer Wellen aus verschiedenen Richtungen ergibt.

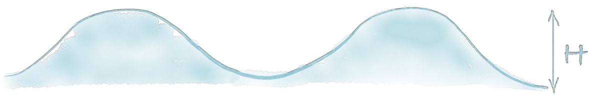
Wenn zum Beispiel aus dem Westen Wellen im Abstand von 15 Sekunden ankommen und aus dem Süden Wellen im Abstand von 12 Sekunden, und diese auch noch eine andere Höhe aufweisen als die Wellen aus dem Westen, dann überlagern sich diese beiden Wellenmuster und es ergibt sich ein unregelmäßiger Wellengang und keine Welle gleicht der anderen.

Ein schöner Platz, um Wellen zu beobachten, aber der falsche für unsere Abschätzung. (CC0)

Schalten wir gedanklich die Wellen aus dem Süden aus und unterstellen wir für unsere Betrachtungen einen komplett regelmäßigen Wellengang. Nehmen wir also an, dass die Wellen perfekt sinusförmig sind und sich in gleichmäßigem Zeitabstand auf uns zubewegen. Nachdem uns die Welle erreicht hat und unser Boot empor gehoben hat, setzt sie ihren Weg fort und rollt auf das Ufer zu. Nehmen wir nun an, dass wir die Energie aus der Welle extrahieren und in elektrische Energie umwandeln könnten, zumindest gedanklich mal mit einem Wirkungsgrad von 100%. Der Energieerhaltungssatz sagt uns, dass es dann keinen Wellengang hinter uns mehr geben kann, denn die Energie haben wir komplett extrahiert.

Wir wollen uns nun überlegen, wieviel Energie in solchen Meereswellen steckt. Hierzu wollen wir gedanklich den Wellengang auf einer Breite b eingrenzen und die Welle einfrieren. Das sieht dann so aus:

bzw. wenn man von der Seite aus schaut, sieht es so aus:



Steckt denn auch in der eingefrorenen Welle Energie? Ja, da steckt Energie drin – und zwar Lageenergie. Im folgenden wollen wir analysieren, wie viel Energie das ist.

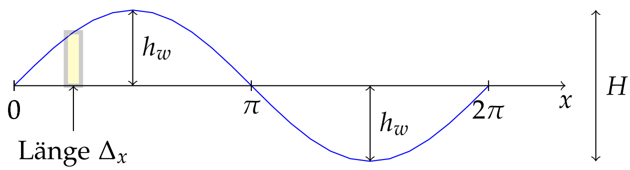
Nehmen wir also eine Welle in perfekter Sinusform. Für die Länge nehmen wir einfachheitshalber $2\pi = 6{,}3$ Meter und die Wellenhöhe betrage H.

Bei der Wellenhöhe müssen wir aufpassen, was wir damit meinen. Wenn ein Segler von Wellen mit fünf Metern Höhe spricht, dann meint er, dass zwischen Berg-Hochpunkt und Tal-Tiefpunkt fünf Meter Höhendifferenz liegen. Mathematiker und Physiker werden unter der Wellenhöhe eher die Amplitude verstehen, also die Höhe des Wellenberges bzw. die Tiefe des Wellentales vom Mittelwert aus gemessen.

Bezeichnen wir deshalb diese „mathematische Wellenhöhe" mit dem Buchstaben h_w. Später ersetzen wir die „mathematische Höhe" durch die „Wellenhöhe" H. Es gilt dann

$$h_w = \frac{H}{2}$$

Wie viel Lageenergie steckt nun in unserer eingefrorenen Sinuswelle der Breite b? Dazu schauen wir uns folgendes Bild an:



Energie für ein kleines Stück der Welle

Berechnen wir mal für den gelben Quader die Lageenergie bzgl. der Mittellage. Hierzu werden

Diese Ausführungen sind eine Ergänzung zum Buch „Erneuerbare Energien - ohne heiße Luft" von Christian Holler und Joachim Gaukel. Dort verwenden wir die Formel für die Leistung von Wellen, ohne sie herzuleiten. Die Ausführungen in diesem Zusatzkapitel sind vor allem für die interessierten Leser gedacht, die Interesse an solchen eher mathematischen Herleitungen haben. Sie finden dieses Dokument und weitere Infos auf `www.ohne-heisse-luft.de`.

wir die aus der Schule bekannte Formel $E = m \cdot g \cdot h$ benutzen:

Das Volumen berechnet sich nach der Formel „Länge mal Breite mal Höhe“.

- Die Länge beträgt Δ_x (in der Mathematik bezeichnet man ganz kurze Strecken häufig mit dem griechischen Buchstaben Delta, also mit Δ).
- Die Breite der eingefrorenen Welle beträgt b.
- Die Höhe beträgt $h_w \cdot \sin x$ (die Höhe hängt ja davon ab, wo wir uns auf der x-Achse befinden).

Wir erhalten für das Volumen also

$$\Delta_x \cdot h_w \cdot \sin x \cdot b$$

Die Dichte des Wassers bezeichnen wir wie auch im Buch mit dem Buchstaben ρ, welche im Meer ca. 1025 Kilogramm pro Kubikmeter beträgt. Diese Dichte multiplizieren wir mit dem Volumen und erhalten dann die Masse des gelben Quaders:

$$m = \Delta_x \cdot h_w \cdot \sin x \cdot b \cdot \rho$$

Der zweite Faktor in der Formel $E = m \cdot g \cdot h$ ist die Erdbeschleunigung g, welche ca. $10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ beträgt.

Nun benötigen wir noch die Höhe des gelben Quaders. Nein, nicht die Höhe des Quaders, sondern die Höhe des **Schwerpunktes** des Quaders, welcher halb so hoch liegt. Somit ist $h = \frac{1}{2} \cdot h_w \cdot \sin x$.

Wir erhalten also als potentielle Energie für den gelben Quader:

$$\begin{aligned} E &= m \cdot g \cdot h \\ &= \Delta_x \cdot h_w \cdot \sin x \cdot b \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot h_w \cdot \sin x \\ &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot \rho \cdot g \cdot h_w^2 \cdot \sin^2 x \cdot \Delta_x \end{aligned}$$

Ziemlich viele Buchstaben! Wenn man nicht regelmäßig mit Formeln arbeitet, muss man sich schon sehr konzentrieren, um nicht den Überblick zu verlieren. Also gehen Sie ruhig nochmal zurück und lesen Sie die letzten Zeilen nochmal, das hilft ungemein beim Verständnis.

Jetzt gibt es aber noch eine kleine Korrektur der Formel, wenn wir uns das Bild oben ansehen: Das Wasser fließt nicht in die Ruhelage sondern weiter nach unten ins Tal der Welle, also müssen wir die obige Zahl für die Lageenergie verdoppeln und wir erhalten nun:

$$E = b \cdot \rho \cdot g \cdot h_w^2 \cdot \sin^2 x \cdot \Delta_x$$

Energie für die ganze Welle

Wenn wir nun die ganze Welle untersuchen wollen und nicht nur ein kleines Stück, müssen wir die Welle auf ihrer ganzen Länge in viele kleine gelbe Quader unterteilen, und die Lageenergie für alle Quader aufsummieren. Wir erhalten also eine Summe.

Aber jetzt kommt etwas interessantes: Wenn wir einen exakten Wert wollen und nicht nur einen ungefähren, dann müssen wir die Länge Δ_x immer kleiner machen. Wenn wir aber die Länge Δ_x von jedem einzelnen Quader immer kleiner machen, dann werden es immer mehr Quader über die Länge der Welle. Wenn wir das Spiel weiter treiben, wird irgendwann die Länge Δ_x Null und wir haben unendlich viele Quader vor uns.

Was passiert jetzt wenn wir alle Quader aufsummieren? Jeder Quader hat jetzt ja eigentlich eine Lageenergie von Null (er hat ja keine Länge und somit kein Volumen mehr), und $0 + 0 + 0 + \ldots$ sollte doch auch Null sein, oder? Weit gefehlt!

Null mal unendlich ist nämlich nicht Null. In unserem Fall ergibt sich genau der Wert der Lageenergie der ganzen Welle! Faszinierend, oder? Aus der Summe ist nämlich jetzt ein Integral geworden, und wir schreiben $\mathrm{d}x$ statt Δ_x um anzudeuten, dass wir die Länge jeden Quaders gegen Null haben gehen lassen:

$$E = \int_{x=0}^{x=\pi} \sin^2(x) \cdot h_w^2 \cdot g \cdot \rho \cdot b \cdot \mathrm{d}x$$

Die Integrationsgrenzen ergeben sich aus dem Teil der Welle, der sich oberhalb der Mittellage befindet, also der Lageenergie des Wellenbergs im Verhältnis zum Wellental. Als Wert für dieses Integral ergibt sich

$$\begin{aligned} E &= \int_{x=0}^{x=\pi} h_w^2 \cdot \sin^2(x) \cdot g \cdot \rho \cdot b \cdot dx \\ &= h_w^2 \cdot g \cdot \rho \cdot b \cdot \int_{x=0}^{x=\pi} \sin^2(x) \cdot dx \\ &= h_w^2 \cdot g \cdot \rho \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \\ &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot h_w^2 \cdot g \cdot \rho \cdot b \end{aligned}$$

Der Abstand zweier Wellen ist im Allgemeinen aber nicht 2π Meter, sondern λ Meter, d.h. die Welle ist um den Faktor $\frac{\lambda}{2\pi}$ länger, die Energie skaliert sich also auch um den Faktor $\frac{\lambda}{2\pi}$:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot h_w^2 \cdot g \cdot \rho \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{1}{4} \cdot g \cdot \rho \cdot \lambda \cdot h_w^2 \cdot b$$

Lassen wir die Welle nun laufen

Bisher hatten wir uns die Welle eingefroren vorgestellt, aber lassen wir die Welle jetzt doch mal laufen. Interessant ist nun weniger der Abstand λ zwischen zwei Wellenbergen, sondern die Zeit T

zwischen zwei anrollenden Wellen, und da gibt es einen interessanten Zusammenhang.

Die lineare Wellentheorie setzt eine Wassertiefe von mindestens der halben Wellenlänge voraus, wir befinden uns also im tiefen Wasser und nicht am Strand. In dem Fall gibt es nach der linearen Wellentheorie einen Zusammenhang zwischen folgenden Größen:

v : Geschwindigkeit, mit der die Welle durch das Meer läuft

T : Zeitdauer zwischen zwei Wellenhochpunkten

λ : Abstand zwischen zwei Wellenhochpunkten

und dieser Zusammenhang ist gegeben durch

$$\lambda = v \cdot T \text{ (wenig überraschend!)}$$

$$v = \frac{g \cdot T}{2\pi} \text{ (das überrascht!)}$$

Der erste genannte Zusammenhang $\lambda = v \cdot T$ ist nicht überraschend und offensichtlich richtig: Der Abstand zweier Wellen ist deren Geschwindigkeit mal die Dauer zwischen zwei anrollenden Wellen.

Der zweite Zusammenhang $v = \frac{g \cdot T}{2\pi}$ ist jedoch überraschend und nur zu verstehen, wenn man sich mit der Theorie der Wellen sehr viel tiefer beschäftigt. Das ganze bedeutet, dass die Welle nicht beliebige Geschwindigkeiten und Abstände annehmen kann.

Akzeptieren wir die beiden Zusammenhänge und setzen sie ineinander ein, dann ergibt sich

$$\lambda = \frac{g \cdot T}{2\pi} \cdot T = \frac{g \cdot T^2}{2\pi}$$

Setzen wir das doch in unsere Formel oben ein und teilen wir das ganze gleich durch die Zeitdauer T zwischen zwei Wellen, denn dann erhalten wir aus der Energie direkt die Leistung der Welle ($P = \frac{E}{T}$):

$$P = \frac{\frac{1}{4} \cdot g \cdot \rho \cdot \frac{g \cdot T^2}{2\pi} \cdot h_w^2 \cdot b}{T}$$
$$= \frac{1}{8\pi} \cdot g^2 \cdot \rho \cdot h_w^2 \cdot T \cdot b$$

Nun haben wir unsere gesuchte Formel gefunden! Einen kleinen letzten Schritt wollen wir noch machen: Die Größe h_w gibt die Amplitude der Welle an, während man normalerweise unter der Höhe einer Welle die Differnz zwischen Berg und Tal ansieht. Wie oben erwähnt, gilt

$$h_w = \frac{H}{2}$$

Wenn wir das einsetzen dann ergibt sich schließlich für die Leistung einer Welle mit Höhe H:

$$\boldsymbol{P = \frac{1}{32\pi} \cdot g^2 \cdot \rho \cdot H^2 \cdot T \cdot b}$$

Wiederholen wir noch kurz, was die Buchstaben bedeuten:

Wir haben unsere Formel mit ganz einfachen Annahmen hergeleitet und nur an einer Stelle auf das Wissen aus der linearen Wellentheorie zurück gegriffen. Die lineare Wellentheorie bohrt das Brett bei der theoretischen Analyse wesentlich tiefer. Aber wissen Sie was? Am Ende kommt die lineare Wellentheorie auf die gleiche Formel wie wir mit unseren ganz einfachen Mitteln. Erstaunlich, nicht wahr?

- π ist das Pi aus der Mathematik, also $\pi = 3{,}14$
- g ist die Erdbeschleunigung, also $g = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
- ρ ist die Dichte des Wassers, im Meer $\rho = \frac{1025\,\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
- H ist die Höhe der Welle gemessen als Differenz zwischen Berg und Tal in der Einheit Meter
- T ist die Zeit zwischen zwei Wellen gemessen in der Einheit Sekunden
- b ist die Breite der betrachteten Welle. Diesen Buchstaben kann man auch weglassen in der Formel, dann erhält man die Leistung pro Meter Wellenfront

Typische Leistungen für Wellen

Setzen wir zum Abschluss ein paar plausible Werte ein. Wie wäre es am Atlantikstrand mit einer Wellenhöhe von 2 Metern und einem Zeitabstand von 10 Sekunden zwischen zwei Wellen. Dann ergibt sich eine Leistung pro Meter Wellenfront von

$$P = 41\,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}} = 41\,000\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}}$$

Wow, da steckt richtig Power dahinter! Wäre die Wellenhöhe anstatt der 2 Meter nur 75 Zentimeter, dann ergäbe sich eine Leistung von immerhin knapp

$$P = 6\,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}}$$

Ordnen wir diese Zahlen noch in einen Kontext ein. In Großbritannien z. B. leben ca. 70 Millionen Menschen und wenn man die Küste als gerade Linie abmisst, dann kommt man auf ca. 1000 Kilometer. Man kommt dann bei einer Wellenhöhe von 2 Metern pro Person auf eine angebotene Leistung von

$$P = \frac{41 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}} \cdot 10^6\mathrm{m}}{70\,000\,000} = 586\,\mathrm{W}$$

Mit diesen angenommen Werten für die Wellenhöhe und dem Zeitabstand ergibt sich also pro Tag und Person eine Energiemenge von 14 kWh im Angebot.

$586\,\mathrm{W} \cdot 24\,\mathrm{h} = 13{,}6\,\mathrm{kWh}$

Wenn wir jetzt unterstellen, dass wir auf der halben Küstenlänge Anlagen errichten mit dem sagenhaften Wirkungsgrad von 50%, dann kommen wir auf 3,5 kWh pro Person und Tag für die Einwohner Großbritanniens. Sie dürfen gerne andere Werte ansetzen, die Sie für plausibler halten.

Tatsächlich sind vor der Küste Großbritanniens bis zu 60 kW pro Meter Wellenfront im Angebot. Aber beim Wirkungsgrad sind 50% ein extrem ambitionierter Wert, der wohl auch in Zukunft kaum realisierbar sein wird. Vielleicht sind 10% viel näher an der Realität. Außerdem wird es schwierig, die Hälfte der Küste mit solchen Anlagen zu belegen.

Aus unserer Sicht werden es realistisch gesehen deutlich weniger als 3,5 kWh pro Person und Tag aus Wellenenergie – leider. Und das bei einem Primärenergieverbrauch von grob 100 kWh pro Person und Tag. Die Briten sind in Europa zudem die glücklichsten in Bezug auf Wellenenergie und trotzdem kommt für sie nur ein kleiner Beitrag zustande. Europaweit gesehen wird Wellenenergie deshalb keine große Rolle spielen können.

1000 km Küstenlänge und 70 Mio Einwohner kann man schön veranschaulichen: Wenn man 1000 km durch 70 Mio teilt, dann erhält man

$$\frac{1\,000\,000\,\text{m}}{70\,000\,000\,\text{Personen}} = \frac{1}{70}\frac{\text{m}}{\text{Person}} = 1{,}5\frac{\text{cm}}{\text{Person}}$$

Wenn man die 1000 km also fair aufteilt, dann bekommt jeder Einwohner von Groß-Britannien 1,5 cm Küste. Das macht klar, warum trotz der 60 kW nicht so arg viel in unserer Rechnung übrig bleibt für jeden Einzelnen.

Unser Fazit

Unsere wichtige Botschaft aus diesen Betrachtungen ist: Energie kann man nicht erfinden oder sich herbeiwünschen. Wenn wir auf der Suche nach regenerativen Energiequellen sind, dann ist es wichtig zu erkennen, wo Energie von der Natur angeboten wird und wie viel davon im Angebot ist. Im zweiten Schritt kann man sich dann mit der technischen Nutzung der angebotenen Energie beschäftigen.

Hierbei gibt es aber immer Wirkungsgrade zu beachten, die z.B. bei der Photovoltaik bei 25%, bei der Windkraft bei 50% oder bei Wasserkraftanlagen gar bei 85% liegen können. Aber immer liegen sie unter 100%.

Dieses Verständnis macht den folgenden Standpunkt unmöglich: „Es gibt so viele Sachen, die in den letzten 100 Jahren erfunden wurden, bestimmt kann man bei den Erneuerbaren noch ganz viele Sachen erfinden und dann brauchen wir die doofen Windräder nicht mehr und alles geht ganz einfach.

Wir müssen nur Geduld haben und auf breiter Linie alle möglichen Ideen fördern.“

Dieser Standpunkt ist nicht sinnvoll, denn wir sollten uns auf die Ideen konzentrieren, bei denen eine Mindestmenge an Energie im Angebot ist. Die Wellenenergie ist aus diesem Grund auf jeden Fall ein geeigneter Kandidat, denn die von der Natur angebotene Leistung ist hoch. Allerdings wird es am Ende trotzdem nur zu einem kleineren Beitrag reichen, wie wir uns klar gemacht haben.

Alles entscheidend sind deshalb die Kosten bei der Nutzung der Wellenenergie. Wenn das auch langfristig teuer bleiben sollte, dann ist der Ansatz wenig sinnvoll. Wenn die Technik aber günstig werden würde, dann sollten wir diesen Beitrag mitnehmen! Wir setzen ja auch auf Wasserkraftwerke, die letztlich auch nur einen moderaten Beitrag zu unserer gesamten Energieversorgung beitragen.

Quellen im Internet:

- Eine Übersicht, die sich an Lehrer an Gymnasien wendet. Auf den Seiten 5-17 wird die in einer Welle steckende Energie besprochen.

  `http://www.physik.uni-bielefeld.de/didaktik/Examensarbeiten/MasterTannhauer.pdf`

- Eine noch detailliertere Übersicht findet sich in Kapitel 4 von

  `http://www2.uni-wuppertal.de/FB11/lehrgebiete/igaw/Bericht_8.pdf`

  Zitat aus dem Dokument: „Die Berechnung der in Wellen enthaltenen Energie gleicht eher einem Schätzvorgang als einer exakten Bestimmung. Die mit verschiedenen Wellentheorien berechneten Werte weichen stark voneinander ab.“

- Und noch eine Quelle: http://www.dr-smai.de/Literatur/Geb-4/80_fi_heft_90a_mai_cpa_zi.pdf